

## Lijnstukken bij een exponentiële functie

### 15 maximumscore 5

- Voor de  $x$ -coördinaat van het raakpunt geldt  $e^{ax} = e$ , dus  $x = \frac{1}{a}$  1
  - $f_a'(x) = a \cdot e^{ax}$  1
  - De helling van de raaklijn is  $f_a'(\frac{1}{a}) = a \cdot e^{a \cdot \frac{1}{a}} = ae$  1
  - Een mogelijke vergelijking van de raaklijn is  $y = ae \cdot x + b$ ; deze gaat door  $(\frac{1}{a}, e)$  dus  $e = ae \cdot \frac{1}{a} + b$  1
  - Dan volgt  $b = 0$ , dus de lijn gaat voor elke waarde van  $a$  door de oorsprong 1
- of
- $f_a'(x) = a \cdot e^{ax}$  1
  - De  $x$ -coördinaat van het raakpunt van de raaklijn door de oorsprong is oplossing van de vergelijking  $a \cdot e^{ax} = \frac{e^{ax}}{x}$  1
  - Hieruit volgt  $x = \frac{1}{a}$  1
  - $f_a(\frac{1}{a}) = e^{a \cdot \frac{1}{a}} = e$  1
  - Dus de lijn door de oorsprong die raakt aan de grafiek, gaat door het (raak)punt met  $y$ -coördinaat  $e$  1

### 16 maximumscore 7

- $D(1, 0)$ ,  $E(e^a, 1)$  en  $F(e^{2a}, 2)$  1
- $AD^2 = 2$ ,  $BE^2 = 2(e^a - 1)^2$  en  $CF^2 = 2(e^{2a} - 2)^2$  1
- Dus  $AD = \sqrt{2}$ ,  $BE = \sqrt{2}(e^a - 1)$  en  $CF = \sqrt{2}(e^{2a} - 2)$  1
- Uit  $AD + BE = CF$  volgt  $\sqrt{2} + \sqrt{2}(e^a - 1) = \sqrt{2}(e^{2a} - 2)$  1
- Herleiden tot  $e^{2a} - e^a - 2 = 0$  1
- Dit geeft  $(e^a + 1)(e^a - 2) = 0$  1
- Dus  $a = \ln(2)$  ( $e^a = -1$  geeft geen oplossing) 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>D(1, 0)</math>, <math>E(e^a, 1)</math> en <math>F(e^{2a}, 2)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>AD = \sqrt{2}</math> en <math>BE</math> is de schuine zijde van een <math>1-1-\sqrt{2}</math>-driehoek met rechthoekszijde <math>e^a - 1</math>, dus <math>BE = \sqrt{2}(e^a - 1)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>CF</math> is de schuine zijde van een <math>1-1-\sqrt{2}</math>-driehoek met rechthoekszijde <math>e^{2a} - 2</math>, dus <math>CF = \sqrt{2}(e^{2a} - 2)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uit <math>AD + BE = CF</math> volgt <math>\sqrt{2} + \sqrt{2}(e^a - 1) = \sqrt{2}(e^{2a} - 2)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Herleiden tot <math>e^{2a} - e^a - 2 = 0</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dit geeft <math>(e^a + 1)(e^a - 2) = 0</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dus <math>a = \ln(2)</math> (<math>e^a = -1</math> geeft geen oplossing)</li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>D(1, 0)</math>, <math>E(e^a, 1)</math> en <math>F(e^{2a}, 2)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>BE = \sqrt{(e^a - 1)^2 + (1 - e^a)^2}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>CF = \sqrt{(e^{2a} - 2)^2 + (2 - e^{2a})^2}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uit <math>AD + BE = CF</math> volgt <math>\sqrt{2} + \sqrt{2(e^a - 1)^2} = \sqrt{2(e^{2a} - 2)^2}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dit geeft <math>1 + e^a - 1 = e^{2a} - 2</math> (ofwel <math>e^{2a} - e^a - 2 = 0</math>)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dit geeft <math>(e^a + 1)(e^a - 2) = 0</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dus <math>a = \ln(2)</math> (<math>e^a = -1</math> geeft geen oplossing)</li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Het inzicht dat het volstaat de afstanden van <math>A</math>, <math>B</math> en <math>C</math> tot de lijn <math>l</math> met vergelijking <math>y = x</math> te bekijken (ofwel dat geldt: <math>d(A, l) + d(B, l) = d(C, l)</math>)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>d(A, l) = \frac{ 0-1 }{\sqrt{2}}</math>, <math>d(B, l) = \frac{ 1-e^a }{\sqrt{2}}</math> en <math>d(C, l) = \frac{ 2-e^{2a} }{\sqrt{2}}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Uit <math>d(A, l) + d(B, l) = d(C, l)</math> volgt <math>1 +  1 - e^a  =  2 - e^{2a} </math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Het inzicht dat de vergelijking <math>1 - 1 + e^a = -2 + e^{2a}</math> opgelost moet worden</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Herleiden tot <math>e^{2a} - e^a - 2 = 0</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dit geeft <math>(e^a + 1)(e^a - 2) = 0</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Dus <math>a = \ln(2)</math> (<math>e^a = -1</math> geeft geen oplossing)</li> </ul>	1